

Глава 5. Устойчивость

14/04

Будем $\times$ устойчив-ть разностн. схем d/ЗК.

$\square$ L — дифф. или разностный опер-р.

$\times$ 2 зад-и, отличающ-ся начал. данны-ми: $[u \in f,$

$$[u|_{t=0} = u_0]$$

и

$$[L\tilde{u} = f,$$

$$[\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0]$$

Будем говорить, что реш-е (зад.) устойч. по начал. данным, if $\exists M > 0$:

$$\|u - \tilde{u}\|_{(n)} \leq M \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{(n)}$$

Такая устойчив-ть означает, что малым изменениям начал. данных соответ-вуют малые измен-ия реш-я

Далее будем говорить про уст-ть разност. схем — вычислительную уст-ть.

Заметим, что сх-ть численного реш-я к точному гарантирует асимптот. уст-ть, т.е. уст-ть при $\tau \rightarrow 0$. Это есть необх. усл-е, но не достаток. d/ вычислит. уст-ти, т.е. уст-ти к ошибкам округления

Опр IF разност. схема устойч. при τ и h иже по времени τ , то схема наз-ся абсолютно вычислительно (безусловно) устойчивой.

Опр IF разност. схема устойч. при некот. огранич-х на выбор τ , то она наз-ся устойчивой.

Пример:
$$\begin{cases} u' - \Delta u = 0, & u = u(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Явная схема Эйлера:
$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \Delta u_n$$

или:
$$u_{n+1} = u_n (1 + \tau \Delta), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$u_0 = u_0$$

$$\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n (1 + \tau \Delta),$$

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_0.$$

$\bar{u}$ — реш-е с вычислит-й погреш-тью:

$u_n = \bar{u}_n + \delta_n$, δ_n — погреш-ть на каждом n -м шаге по времени.

Уст-ть будет означать, что δ_n не растёт с ростом n неограниченно. Тем самым, при вычислении u_{n+1} будет на $(n+1)$ -м шаге сделана ошибка:

$$U_{n+1} = \bar{U}_n (1 + \tau \Delta) + \delta_n (1 + \tau \Delta),$$

$$U_{n+1} = \bar{U}_{n+1} + \delta_{n+1}, \text{ где } \delta_{n+1} = \delta_n (1 + \tau \Delta)$$

III. 0, if $|1 + \tau \Delta| > 1$, то $|\delta_{n+1}| > |\delta_n|$, решение растёт и схема не уст.

Итак: $|1 + \tau \Delta| > 1$ — не уст-ть,
 $|1 + \tau \Delta| \leq 1$ — уст-ть.

$\Delta > 0$: $1 + \tau \Delta > 1 \Rightarrow$ при $\Delta > 0$ схема не уст.
 или $\forall$ малое τ .

$$\Delta < 0: -1 < 1 + \tau \Delta \leq 1,$$

выполнено

$$\tau \Delta > -2 \Leftrightarrow \boxed{\tau < -\frac{2}{\Delta}} \text{ — усл-е уст-ти}$$

Объясним, что это означает с т. зрения общ. реш-я разностн. схемы: $U_{n+1} = U_n (1 + \tau \Delta)$.

Хар. ур-ние: $q = 1 + \tau \Delta$

Итак: if $|q| > 1$ ($|q| = |1 + \tau \Delta|$) $\Rightarrow$ схема неуст. (см. выше) $\Rightarrow$ реш-е растёт.

If $|q| \leq 1$ — реш-е не возрастает ($|1 + \tau \Delta| \leq 1$) $\Rightarrow$ схема устойчива.

III. 0, if общее реш-е имеет корни хар. ур-ния ≥ 1 , то реш-е неуст., if все корни

хар. ур-ния ≤ 1 — устойчивость есть.

П.1. Нуль-устойчивость

На выше сказанном базируется понятие нуль-уст-ти.

* k -шагов. лине. метод в общ. виде:

$$\left[\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{n-j} = \tau \sum_{j=0}^k \beta_j f(u_{n-j}) \right]^{(*)}$$

Опр Многочлен $\rho(q) = \sum_{j=0}^k \alpha_j q^{n-j}$ — 1ый производящий многочлен.

Опр Многочлен $\sigma(q) = \sum_{j=0}^k \beta_j q^{n-j}$ — 2ой производящий многочлен.

Общ. реш-е систем. ур-ния $(*)$ есть

$$\left[u_n = C_1 q_1^n + \dots + C_k q_k^n \right]$$

* диффр. ур-ние $u'(t) = 0$ (его решение $u = \text{const}$). Р/этой задачи ЛММ $(*)$

соотв. $\beta_i = 0, i = \overline{0, k}$, и, соотв., хар. многочлен $\rho(q)$ будет совпадать с 1ым производящим многочленом $\rho(q): \sum_{j=0}^k \alpha_j q^{n-j} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^k \alpha_j q^{k-j} = 0$$

Найдем корни $q_1, \dots, q_k$; if среди них есть корни, большие по модулю 1, то

реш-е уст. (присем реш-е зад. $u'(t)=0$),
if < 1 , то уст.

Исследование уст-ти — зад. сложная,
поэтому описанная процедура позволяет
определять, будет ли найден. схема уст.
хотя бы на реш-и $u = \text{const}$. If нет $\Rightarrow$ то
 $u \neq \text{const}$ не имеет смысла.

Осталось $q: |q|=1$. Как нам известно,
if $|q|=1$ и q имеет кратность s , то
 $P_{s-1}(n)q^n$ — есть частн. реш-е, и при $s > 1$
 $\Rightarrow$ возрастает ($s > 1$), тогда как реш-е
есть const , т.е. if $|q|=1$ и кратность > 1 ,
то оно не уст.

На основании выше сказанного введем
Опр ЛММ удовлетворяет корневому
усл-ю, if:

- 1) Все корни 1-ю производящ. мн-на q_i ,
 $i = \overline{1, k} : |q_i| \leq 1$;
- 2) Все корни $|q_i|=1$ имеют кратность 1.

✓ ЛММ, удовл. корней усл-ю, устн. (нуль-уст,
т.е. уст. на реш-и типа const)
▲ (Только что доказано) ■

Нуль-уст-ть методов Адамса

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j U_{n-j} = \tau \sum_{j=0}^k \beta_j f(U_{n-j})$$

В мет-х Адамса $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = -1, \alpha_i = 0, i = \overline{2, k}$.

Лин. ур-ние y' зад. $u'(t) = 0$ имеет вид:

$$q^k - q^{k-1} = 0 \Leftrightarrow q - 1 = 0 \Leftrightarrow q = 1. \text{ Корень}$$

$q = 1$ имеет кратность 1 $\Rightarrow$ метод нуль-уст.

Пример (зукшаров. ф-ла Тира (дискрет. навод.))

$$\text{Схема: } \left[\frac{1}{2} U_{n+1} - 2U_n + \frac{1}{2} U_{n-1} \right] = f(U_{n+1})$$

$P(q) = \frac{3}{2} q^2 - 2q + \frac{1}{2} = 0$ (1ый производящ.
многочлен)

$$3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow q_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \begin{cases} 1, \\ 1/3 \end{cases}$$

Оба корня $\leq 1 \Rightarrow$ указ. метод нуль-уст.

✓ (1ый барьер Рунге-Кутты / Рунге-Кутты)
Лор-к аппр-ции p уст. мин. k -шагов. м.

тогда подчиняется правилу:

$p \leq k - 1$ — явн. мет-ов,

$p \leq k + 1$ — явн. мет-ов, k — нечетное,

$p \leq k + 2$ — явн. мет-ов, k — четное

▲ (Без док-ва) ■

Еще раз повторим: нуль-уст-ть опре-
-ся по уст-ти на функции $u'(t) = 0$
(т.е. $u = \text{const}$), т.е. на реш-и вида const , что
необх., но во многих случаях не достат.

П.2. Жесткие задачи

Есть жесткая задача, реш-е x есть супер-
позиция канонических процессов (бы-
стрых и медленных). В квант-ве приме-
на $\hat{x}$ с-му ур-ний:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{array} \right]$$

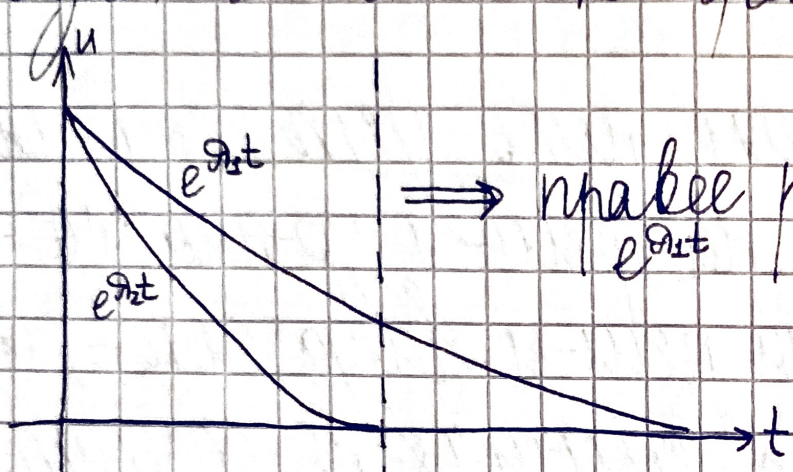
Как $\Rightarrow$ из общ. теории систем. ур-ний
(см. ранее), ее реш-е имеет вид:

$$[\vec{u}_n = c_1 \vec{e}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{e}_2 e^{\lambda_2 t}], \text{ где } \lambda_1, \lambda_2 - \text{с. знат-я}$$

Д; ξ_1, ξ_2 - соотв. с. в-ра; $u^{(i)} = e^{\lambda_i t}$, $i = \overline{1, 2}$

□ $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $u^{(1)} = e^{\lambda_1 t}$,
 $u^{(2)} = e^{\lambda_2 t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

□ также $|\lambda_2| \gg |\lambda_1|$, $|\lambda_1| \sim 1$. Тогда изобразим $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ на графике:



$\Rightarrow$ правее реш-е опред-ся только $e^{\lambda_1 t}$

И.е. имеются 2 процесса:

- $u^{(2)}(t)$ — быстро убывающий;

- $u^{(1)}(t)$ — убывающий медленно;

тем самым, начиная с некоего момента, реш-е $\vec{y} = u^{(1)} + u^{(2)}$ будет опред-ся только медленной компонентой (быстрая будет не видна)

Опр С-ма ур-ний $\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$ наз-ся устойчивой, if:

1) $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, $j = \overline{1, m}$ ($m = \dim$ с-мы);

$$2) S = \max_j |\operatorname{Re} \rho_j|$$

$$\frac{S}{\min_j |\operatorname{Re} \rho_j|} \gg 1; \quad S - \text{коэффициент жесткости}$$

(столбным число обусловленности)

$\ll$, как жесткость с-мы влияет на вычислит. алгоритм.

Пример 1 (Авн. мет. Эйл.)

$$A_{2 \times 2}; \quad \frac{\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n}{\tau} = A \vec{u}_n$$

$$\text{Частн. реш-е: } \vec{u}_n = \vec{\xi} \rho^n \Rightarrow \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau} \vec{\xi} =$$

$$= \rho^n A \vec{\xi} \Leftrightarrow \frac{\rho - 1}{\tau} \vec{\xi} = A \vec{\xi}$$

$\exists \rho_1, \rho_2$ — е. знач-я A и $\vec{\xi}_i$ — соотв. им

$$\text{с. в-ры} \Rightarrow \vec{u}_n = \vec{\xi}_1 \rho_1^n + \vec{\xi}_2 \rho_2^n, \text{ где: } \frac{\rho_1 - 1}{\tau} = \rho_1,$$

$$\frac{\rho_2 - 1}{\tau} = \rho_2 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 = 1 + \tau \rho_1 \\ \rho_2 = 1 + \tau \rho_2 \end{cases}$$

$$\text{Итого: } \left[\vec{u}_n = \vec{\xi}_1 (1 + \tau \rho_1)^n + \vec{\xi}_2 (1 + \tau \rho_2)^n \right]$$

$$\text{А/уст-ти нужно: } \left[\begin{aligned} |1 + \tau \rho_1| &\leq 1, \\ |1 + \tau \rho_2| &\leq 1 \end{aligned} \right] \quad (*)$$

И с-ма жесткая: $[\rho_1 < 0, \rho_2 < 0 \text{ и } |\rho_2| \gg |\rho_1|]$

Тогда из 1-го ур-ния (*): $-1 \leq 1 + \tau \rho_1 \leq 1$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \tau \rho_1 \leq 0 \Leftrightarrow \tau \leq \frac{2}{|\rho_1|}$$

Или 2-ю ур-ние (*): $-1 \leq 1 + \tau \rho_2 \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \tau \leq \frac{2}{|\rho_2|}$

Усл-е уст-ти: $\left[\tau \leq \frac{2}{|\rho_2|} \leq \frac{2}{|\rho_1|} \right]$ т.е. величину шага по времени ограничивает быстрый ($u^{(2)} \sim \rho_2$) процесс, а, начиная с некоторого момента "не виден", и мы вынуждены вести вычисления с "малым" шагом τ , вместо того, чтобы исп-ть усл-е $\tau \leq \frac{2}{|\rho_1|}$, более мягкое.

Пример 2 (Явн. мет. Эй.)

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = A u_{n+1}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{\tau} \vec{e}}{\tau} = A \vec{e} \Rightarrow \rho_1 = \frac{1}{1 - \tau \rho_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{1 - \tau \rho_2}$$

По-прежнему, $\rho_1 < 0, \rho_2 < 0, |\rho_2| > |\rho_1|$

Усл-е' уст-ти: $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{|1 - \tau \rho_1|} \leq 1, \\ \frac{1}{|1 - \tau \rho_2|} \leq 1 \end{array} \right] \Rightarrow$ вычислены при $\forall \tau$

Итак, схема АДС. КМ, и мы имеем
высотность участка реки с марсом I.